CORRECTION MPI (session 2004)

Première partie

1. a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge $\Longleftrightarrow$ $x > 1$, $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. de même pour ζ.

b) ζ est monotone donc admet une limite en 1^+.

$\zeta(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$, $\forall\, x > 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

En faisant tendre $x \mapsto 1^+$ puis $N \mapsto +\infty$ on obtient le résultat demandé.

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, pour $a > 1$.

$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On applique le théorème du double limite.

d) L'application $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et $(\frac{1}{n^x})^{(k)} = (-1)^k \frac{(\text{Log} n)^k}{n^x}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $a > 1$ et $x \geq a$; on a:

* $\left|(-1)^k(\text{Log} n)^k \frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{(\text{Log} n)^k}{n^a}$ et

* $\lim_{n\mapsto+\infty} n^{\frac{1+a}{2}} \frac{(\text{Log} n)^k}{n^a} = 0.$

Donc

ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\text{Log} n)^k}{n^x}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, t \in [n, n+1]$ on a:

$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$, donc pour tout entier non nul N on aura,

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_1^{N+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $\zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x)$

2. $\zeta(x)$ est équivalente à $\frac{1}{x-1}$ au voisinage de 1^+

Deuxième partie

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$ on a: $1 + \frac{x}{n} > 0$.

$\text{Log}(1 + \frac{x}{n}) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ donc $g_n(x) \sim \frac{x^2}{2n^2}$ Donc F est bien définie sur $]-1, +\infty[$.

2. On a: $g_n'(x) = \frac{x}{n(x+n)}$.

Pour tout segment $[a, b]$ de $]-1, +\infty[$ on a :

Pour n assez grand, $\left|g_n'(x)\right| \leq \frac{|\,a\,| + |\,b\,|}{n(n+a)} = \alpha_n$ pour tout $x \in [a, b]$ et

$\sum_{n\geq 1} \alpha_n$ est une série convergente.

3. On a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
- la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$.
- La série $\sum_{n\geq 1} g'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1.+\infty[$.

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n(n+x)}$.

---

4. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   - La série $\sum_{n\geq 1} g'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1.+\infty[$.
   - Pour tout entier $p \geq 2$, $\quad g_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p (p-1)!}{(n+x)^p}$.
   - Pour tout entier $p \geq 2$ et $b \geq a > -1$, $\quad \operatorname{Sup}_{[a,b]} |g_n^{(p)}(x)| = \dfrac{(p-1)!}{(n+a)^p}$
   - $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(p-1)!}{(n+a)^p}$ converge.

   Donc F est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et $\forall\, x > -1$ et $k \geq 2 \quad F^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (k-1)!}{(n+x)^k}$.

---

5. Pour tout entier $k \geq 2$, $F^{(k)}(0) = (-1)^k (k-1)! \zeta(k)$.

---

6. a) $\gamma_{n+1} - \gamma_n = g_n(1) + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

---

b) $\sum_{n\geq 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge et on a $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) = \gamma_{N+1} - \gamma_1 = \sum_{n=1}^{N} g_n(1) + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right).$$

Par passage à la limite on obtient $\gamma = F(1)$.

---

7. a) $\operatorname{Log}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad R = 1$.

---

b)

- Pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n 2^n} = \operatorname{Log}(\dfrac{3}{2})$.
- Pour tout $x \in [0,1]$, $\quad \left|R_n(x)\right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1} \mapsto 0$ quand $n \mapsto +\infty$.

On applique le Théorème du double limite on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \operatorname{Log}(2)$.

---

c) $g_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k n^k} x^k$.

---

8. a) i) Par majoration du reste d'une série alternée on a :

$$\left|\varphi_N\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=N}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{n^k k}\right| \leq \frac{1}{N n^N}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

ii) On a $\sum_{n\geq 1} \psi_N(\frac{x}{n})$ converge absolument et

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \psi_N(\frac{x}{n})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_N(\frac{x}{n})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Nn^N} = \frac{\zeta(N)}{N}$$

---

b) i) $\left|\psi_N(\frac{x}{n})\right| = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(-x)^k}{n^k k} \leq \frac{1}{Nn^N} \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{Nn^N(1+x)}$

---

ii) On a $\sum_{n\geq 1} \psi_N(\frac{x}{n})$ converge absolument et

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \psi_N(\frac{x}{n})\right| \leq \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Nn^N} = \frac{1}{x+1} \frac{\zeta(N)}{N}$$

---

c) Puisque $\lim_{n\to+\infty} \zeta(N) = 1$ alors d'après a)-ii) et b)-ii) on a:

$$\forall\, x \in]-1,1], \quad \lim_{N\mapsto+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N(\frac{x}{n}) = 0$$

---

9. D'après 7-c), on a

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{N-1} \frac{(-1)^k}{kn^k} x^k + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N(\frac{x}{n}) =$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k} x^k \zeta(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N(\frac{x}{n}).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en utilisant 8-(c) on aura $F(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} x^k$

---

10. On a $\frac{\zeta(k)}{k} \sim_{\infty} \frac{1}{k}$, donc $R = 1$ et $\frac{F^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k}$.

Troisième partie

---

1. Pour tout $x > 1$, $\quad 0 \leq f_k(x) \leq \frac{x}{x^{k+1}} = \frac{1}{x^k}$, intégrable au voisinage de $+\infty$ ($k \geq 2$).

---

2. $U_n(k) = \int_n^{n+1} f_k(x)dx = n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{k+1}} = \frac{n}{k}(\frac{1}{n^k} - \frac{1}{(n+1)^k})$

---

3. Soit N un entier ≥ 2,

$$\int_1^{N+1} f_k(x)dx = \sum_{n=1}^{N} U_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{n}{(n+1)^k}) =$$

$$\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)^k}) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^{k-1}} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^k}\right)$$

Par passage à la limite on obtient $\int_1^{+\infty} f_k(x)dx = \frac{\zeta(k)}{k}$

---

4. On a: $|(-1)^k V_k| = V_k = \int_2^{+\infty} f_k(x)dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}$

la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}$ est convergente.

---

5. a) $V_k = \int_2^{+\infty} f_k(x)dx = \int_1^{+\infty} f_k(x)dx - \int_1^2 f_k(x)dx = \frac{\zeta(k)}{k} - \int_1^2 \frac{1}{x^{k+1}}dx =$
$\frac{\zeta(k)}{k} + \frac{1}{k}(\frac{1}{2^k} - 1)$

---

b) $V = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{\zeta(k)}{k} + \frac{1}{k}(\frac{1}{2^k} - 1)\right) = F(1) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = F(1) - \mathrm{Log}(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2} +$
$\mathrm{Log}(2) - 1 = F(1) + \mathrm{Log}(\frac{4}{3}) - \frac{1}{2}$

---

6. a) ϕ est continue par morceaux sur $[2, +\infty[$ et
$0 \leq \phi(x) \leq \frac{1}{x(1+x)} \sim_\infty \frac{1}{x^2}$.

---

b) $V = \sum_{k=2}^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}}dx = \int_2^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}}dx =$
$\int_2^{\infty} \frac{E(x)}{x}\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}dx = \int_2^{+\infty} \phi(x)dx$

la permutation $\sum$ et $\int$ se justifie par :

- $x \mapsto \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.
- la série $\sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}}$ converge simplement sur $[2, +\infty[$.
- $\int_2^{\infty} |\frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}}|dx = V_k$ et $\sum_{k\geq 2} V_k$ converge.

Pour justifier la permutation on peut aussi montrer que

$$\lim_{N\mapsto+\infty} \int_2^{+\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}} = 0.$$

---

c) $\int_n^{n+1} \phi(x)dx = n\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2(1+x)}dx.$
Or $\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$
donc $\int_n^{n+1} \phi(x)dx = n\left[\mathrm{Log}(1 + \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{n+1} - \mathrm{Log}(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\right]$

---

d) Soit $A_n = \mathrm{Log}(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$. On a,
$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \phi(x)dx = \sum_{n=2}^{N} n(A_{n+1} - A_n) = NA_{N+1} - \sum_{n=3}^{N+1} A_n - 2A_2$
En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient
$V = \sum_{n=3}^{+\infty} A_n - 2A_2 = F(1) + \frac{1}{2} - \mathrm{Log}\frac{4}{3}$

Quatrième partie

1. $\text{Log}(G_n(x)) = \text{Log}n! + x\text{Log}n - \sum_{k=1}^{n} \text{Log}(x+k) = x\text{Log}n - \sum_{k=1}^{n} \text{Log}(1+\frac{x}{k}) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) - x\gamma_n$

2. a) Par passage à la limite dans question 1), on obtient $\forall\ x \in]-1, +\infty[$,
$\text{Log}(G(x)) = F(x) - x\gamma$ donc $G(x) = e^{F(x)-\gamma x}$.

b) $G_n(x+1) = (x+1)\dfrac{n}{x+n+1}G_n(x)$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $G(x+1) = (x+1)G(x)$.

c) • D'après 2-a), on a $H(x) = \dfrac{G(x)}{x} > 0,\ \forall\ x > 0$.
• $xH(x) = G(x) = \dfrac{G(x+1)}{x+1} = H(x+1)$.
• $H(1) = \dfrac{G(1)}{1} = 1$
• H est C^2 sur $]0, +\infty[$ et $(\text{Log}H)''(x) = F''(x) + \dfrac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)^2} + \dfrac{1}{x^2} \geq 0$.

3. Par récurrence $J(n) = (n-1)! \Rightarrow H(n) = (n-1)! \Rightarrow G(n) = n!$.

4. a) i) On applique l'inégalité de convexité à $\text{Log}J$:

$* \ n-1 < n < n+x \ \Rightarrow\ \text{Log}\dfrac{J(n)}{J(n-1)} \leq \dfrac{1}{x}\text{Log}\dfrac{J(n+x)}{J(n)}$,

$* \ n < n+x < n+1 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{x}\text{Log}\dfrac{J(n+x)}{J(n)} \leq \text{Log}\dfrac{J(n+1)}{J(n)}$.

ii) En utilisant 3 et 4-a), on obtient,

$x\text{Log}(n-1) \leq \text{Log}\dfrac{J(n+x)}{J(n)} \leq x\text{Log}n \Rightarrow (n-1)!(n-1)^x \leq J(n+x) \leq n^x(n-1)!$.

iii) Par récurrence sur p on obtient $J(p+x) = (x+p-1)(x+p-2)\cdots xJ(x),\quad p \in \mathbb{N}^*$.

iv) On applique 4-a)-ii),
$*$ pour $n = p,\quad J(n+x) \leq n^x(n-1)! \Rightarrow \dfrac{n}{n+x}J(x) \leq \dfrac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.
$*$ pour $n = p+1 \geq 2,\quad n!n^x \leq J(n+1+x) \Rightarrow \dfrac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \leq J(x)$.

b) Par passage à la limite dans $4-a)-iv)$ on obtient $\forall\ x \in]0, 1[$, on a $J(x) = \dfrac{G(x)}{x}$.
L'égalité reste vraie pour $x = 1$.

c) On a $G(x) = xG(x-1) = x(x-1)G(x-2) = x(x-1)\cdots(x-p+1)G(x-p)$.

d) J et $x \mapsto \dfrac{G(x)}{x}$ coïncident sur $]0, 1]$ d'après 4-b).

pour $x > 1$ et $p = E(x)$ on a $J(x-p) = \dfrac{G(x-p)}{x-p}$ car $x - p \in]0,1[$,
on obtient $\dfrac{G(x)}{x} = (x-1)\cdots(x-p+1)(x-p)J(x-p) = J(x)$.

Cinquième partie

---

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad C_n(f) = \dfrac{(-1)^n}{\pi(x-n)}\sin(x\pi)$

   La série de Fourier de f est $\dfrac{\sin(x\pi)}{\pi x} + \dfrac{\sin(x\pi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left[\frac{e^{int}}{x-n} + \frac{e^{-int}}{x+n}\right]$.

---

2. f est de Classe $\mathcal{C}^1$- par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   On applique le Théorème de Dirichlet : La série de Fourier de f converge simplement vers

$$f_r : t \longmapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in]-\pi,\pi[\\ \dfrac{f(-\pi^-)+f(-\pi^+)}{2} = \dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2} = \cos(x\pi) & \text{si } t = -\pi \end{cases}$$

---

3. Pour $t = \pi$,

$$f_r(\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \cos(x\pi) = \frac{\sin(x\pi)}{\pi x} + \frac{\sin(x\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}$$

---

4. a) i) $|\dfrac{2x}{x^2-n^2}| \leq \dfrac{2u}{n^2-1}$ pour $n \geq 2$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2x}{x^2-n^2}$ converge normalement sur $]0,u]$

---

ii) On intègre sur $]0,u]$; l'égalité de la question 3 on obtient,

$$\int_0^u \frac{x\pi\cos(x\pi)-\sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)}dx = \left[\mathrm{Log}\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)\right]_{x\mapsto 0}^{x=u} = \mathrm{Log}\left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^u \frac{2x}{x^2-n^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right).$$

---

iii) $\mathrm{Log}\left(\dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right) = \displaystyle\lim_{N\mapsto\infty}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Log}\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right) = \lim_{N\to\infty}\mathrm{Log}\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)\right)$ donc

$$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = \lim_{N\mapsto+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)$$

---

b) i) $G_n(u)G_n(1-u) = \dfrac{n}{n+1-u}(1-u)\left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u^2}{k^2}\right)\right]^{-1}$

Par passage à la limite et en utilisant 4-a)-iii) on obtient $G(u)G(1-u) = \dfrac{\pi u(1-u)}{\sin(\pi u)}$

---

ii) On a, $G(u) = e^{F(u)-\gamma u}$. On remplace dans la relation précédente on obtient
$F(u) + F(1-u) = \gamma + \mathrm{Log}\left(\dfrac{\pi u(1-u)}{\sin(\pi u)}\right)$

---

c) En faisant tendre u vers 0 dans 4-b)-ii), on obtient $F(1) = \gamma$.
Pour $u = \dfrac{1}{2}$ on a $2F(\dfrac{1}{2}) = \gamma + (\dfrac{\pi}{4})$

Sixième partie

. $\dfrac{2x^2}{x^2-n^2} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{n^{2k}}, \quad R = n$

2. $\left|\varphi_N(\frac{x}{n})\right| = \sum_{k=N}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{n^{2k}} \leq \dfrac{1}{n^{2N}}\sum_{k=N}^{\infty}x^{2k} = \dfrac{x^{2N}}{1-x^2}\dfrac{1}{n^{2N}}$

   d'où $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_N(\frac{x}{n})\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_N(\frac{x}{n})\right| \leq \zeta(2N)\dfrac{x^{2N}}{1-x^2}$

3. On a $\pi x\mathrm{cotg}\pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-n^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\dfrac{x^{2k}}{n^{2k}} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_N(\frac{x}{n}) =$

   $1 - 2\sum_{k=1}^{N-1}x^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2k}} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_N(\frac{x}{n})$

   Or d'après 2. $\lim_{N\mapsto+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_N(\frac{x}{n}) = 0$ donc

   $\pi x\mathrm{cotg}\pi x = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k}$

4. On a $\mathrm{cotg}x - 2\mathrm{cotg}(2x) = \mathrm{tg}x$.

5. On a :

   * Si $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$ $\quad x\mathrm{cotg}(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)\dfrac{x^{2k}}{\pi^{2k}}$

   et

   * Si $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$ $\quad 2x\mathrm{cotg}(2x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}2^{2k}\zeta(2k)\dfrac{x^{2k}}{\pi^{2k}}$.

   donc $\mathrm{tg}x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}(2^{2k}-1)x^{2k-1}$, vraie pour $x = 0$.

   On a $\dfrac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}(2^{2k}-1) \sim \dfrac{2^{2k}}{\pi^{2k}}$.

   En utilisant le règle de D'Alembert pour les séries numériques on obtient

   $$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{2^{2k+3}|x^{2k+3}|}{\pi^{2k+2}}\frac{\pi^{2k}}{2^{2k+1}|x^{2k+1}|} = \frac{4x^2}{\pi^2}.$$

   Donc $R = \dfrac{\pi}{2}$.

6. On a $\mathrm{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow \mathrm{tg}'(0) = 1$ et $\dfrac{\mathrm{tg}^{(3)}(0)}{3!} = \dfrac{1}{3}$.

   Par unicité du développement en série entière on obtient $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$.